

寻找公司总部和仓库的最佳位置

学习阶段： 3

学习范畴： 度量、图形与空间范畴

学习单位： 直角坐标系
三角形的心
探索与研究

目标： (i) 丰富学生在现实问题中应用中点公式、距离公式和三角形的心进行解难的经验
(ii) 提升学生在建模中作出假设和运用数学概念的能力
(iii) 运用数学软件创造虚拟模型

先备知识： (i) 理解中点公式
(ii) 理解毕氏定理和距离公式
(iii) 对三角形的心有基本认知

教学资源： 配有 GeoGebra 或网路连线的桌上型电脑或平板电脑

背景资料：

寻找建筑物（例如总部、仓库、图书馆和医院）的最佳位置是工业工程和城市规划中的一个重要课题。这项任务涉及仔细考虑各种因素，以确保设施的高效运作和最大可达度，以满足其预定用途。以下建模活动的主要目标是利用数学方式找出公司总部和仓库的最佳位置。这有助于公司与旗下商店沟通，并有效地交付产品。

透过深入探究寻找公司总部和仓库的最佳位置的复杂性，这一系列活动能带出规划性建模（**Prescriptive modelling**）的核心。具体而言，学生需要找到问题的「最佳」解决方案。这些活动的建模结果促进了学生之间有意义的讨论和反思。在处理涉及等距和最短距离的情况时，学生需应用中点公式、距离公式和三角形中心来得出解决方案。

在数学概念之外，这种探索培养了学生的建模能力，使他们能够作出明智的假设并认识到模型的局限性。这活动进一步扩展他们的探索，学生利用资讯科技创建总部和仓库最佳位置的虚拟模型。数学和科技的整合不仅丰富了他们的学

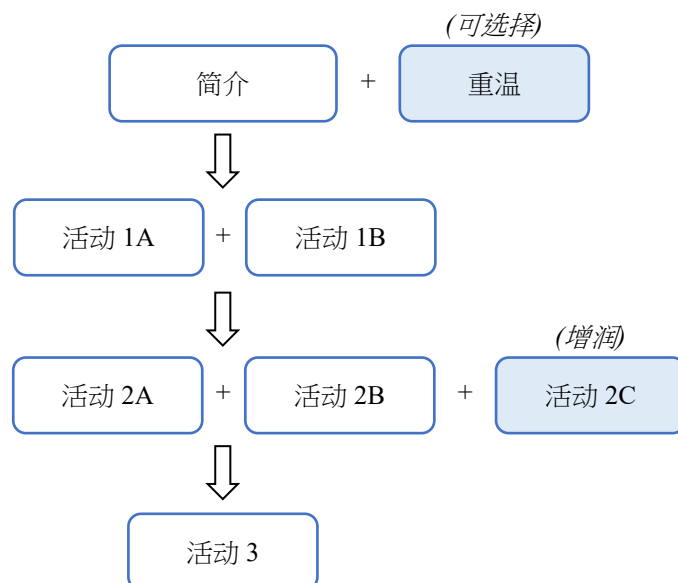
习经历，而且展示了数学建模在日益数码化的世界中的相关性。

活动详情：

这资源套件共有三个主要的活动：

- 活动 1：考虑两家商店，寻找总部（1A）和仓库（1B）的位置。
- 活动 2：考虑三家商店，寻找总部（2A）和仓库（2B 和 2C）的位置。
- 活动 3：创造寻找位置的虚拟模型。

因应学生的能力和校情，教师可以考虑采用以下方法制定活动计划：



根据 Yong 等人（2015）的数学建模过程框架，下表总结了教师可以在相应问题中与学生讨论的元素。

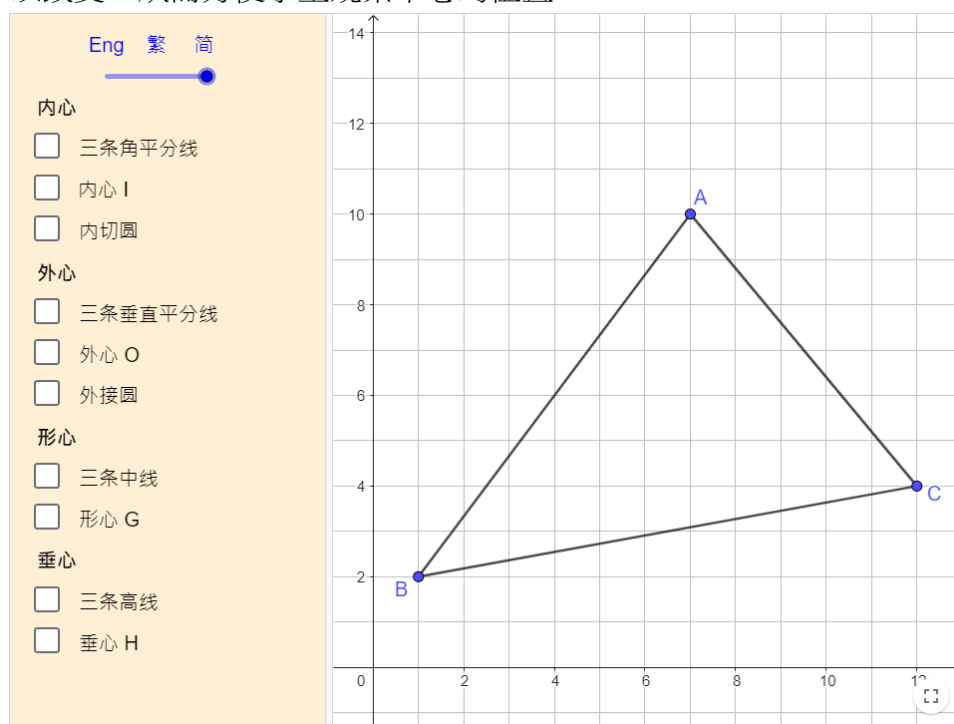
阶段	元素	工作纸	工作纸	工作纸	工作纸	工作纸	工作纸
		1A	1B	2A	2B	2C	3
定义	定义感兴趣的问题	封面, 1	7	1	5	7	
	确定变量和参数	6					
转化	确定支配原则	1	7	1	5		
	作出简化假设	5	9	3			
	构建数学模型	3					2-4
分析	选择合适的数学工具 & 解决数学问题	2, 4	7	2	6	7	1-4
	确定或估计参数						
	验证解决方案			2	6		
解释	视像化解决方案	2, 4	7	2	6	7	2-4
	得出适当的结论 & 传达结果		8	2, 4		7	

重温（基于学生能力）

这部分回顾学生对三角形的中心的先备知识。

教学建议：

1. 在问题 1 至 4 中，教师可以回顾学生对三角形的中心的先备知识。教师可以利用以下小程序来展示三角形的特殊线和中心。 A 、 B 和 C 的坐标可以改变，从而方便学生观察中心的位置。



连结：<https://www.geogebra.org/m/btwzyahk>

建议答案：

1. 内心 I 是三角形的三条 角平分线 的交点。
2. 外心 O 是三角形的三条 垂直平分线 的交点。
3. 形心 G 是三角形的三条 中线 的交点。
4. 垂心 H 是三角形的三条 高线 的交点。

活动 1A (请参阅工作纸 1)

在此活动中，问题聚焦于如何找到一个总部的位置，使其到两家不同商店的距离相同且最短。此活动让学生在现实问题中应用中点的概念。

教学建议：

1. 在问题 1 中，教师提高学生运用数学术语表达现实世界问题的能力。教师可以透过要求学生绘画两个表示商店 A 和 B 的任意点来促进讨论。注意，学生可能描述需求为「 $QA = QB$ 」。然而，这并不足以满足要求，因为即使 $QA = QB$ ， A 、 Q 和 B 可能不共线。对于能力较高的学生，教师可以考虑讨论 2003 年香港中学会考数学科第二卷第 31 题和 2016 年香港中学文凭试数学科（必修部分）第二卷第 26 题的图形。

建议答案：

Q 是 A 和 B 的中点。

2. 透过从问题 1 中获得的经验，学生在一些具体的情况中找出总部的位置。

建议答案：

(a) $Q = (3, 2)$

(b) $Q = (4, 2)$

(c) $Q = (3, 2)$

3. 教师可以向学生介绍模型的概念。在这个情境，模型可以用来找到总部 Q 的位置。这个任务需要他们应用中点公式的知识。

建议答案：

$$Q = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

4. 问题 4(a) 让学生应用他们所制定的模型找出总部 Q 的位置。在问题 4(b) 中，他们运用距离公式计算从 Q 到每家商店 A 和 B 的距离。

建议答案：

(a) $A = (2, 6)$ 和 $B = (10, 2)$

$$Q = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{6+2}{2} \right) \\ = (6, 4)$$

(b) $QA = \sqrt{(2-6)^2 + (6-4)^2}$
 $= \sqrt{20}$
 $= 4.47 \text{ km}$

$$QB = QA \\ = 4.47 \text{ km}$$

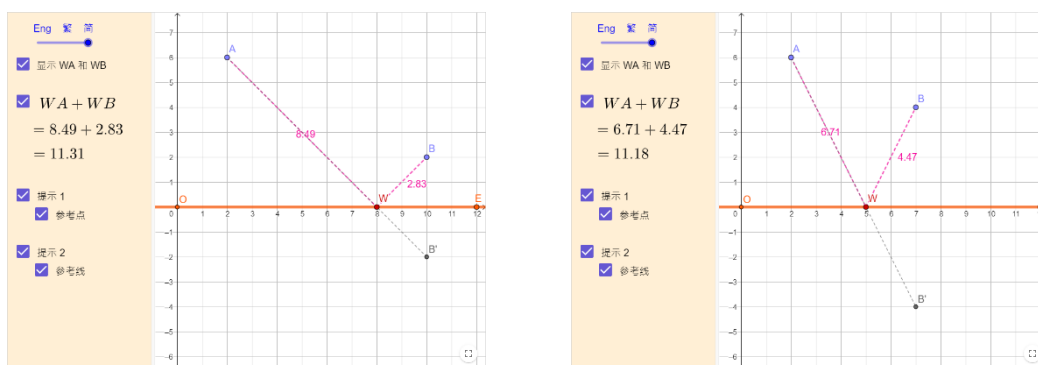
5. 在活动 1A 的尾声，教师可以带领学生讨论所制定模型所作出了的假设。这可以提高学生在建模中作出假设的能力。以下是一些可能的讨论结果。
- 2D 模型：假设地面是平的。实际上，地球的表面并不是平的。如果总部和两家商店之间的距离非常远，我们便需要考虑地球表面的曲率。
 - 无障碍传输：没有障碍物（例如山丘或建筑物）阻碍总部和两家商店之间的无线电波传输。
6. 教师可以进一步鼓励学生讨论在寻找位置时应该考虑的其他因素。这可以提高他们对于方法的可行性的意识和明辨性思考。以下是一些可能的讨论结果。
- 建设的可行性：在选定的位置建造总部涉及评估该位置是否满足必要的建筑法规和环境考虑。
 - 建筑成本：在选定的位置建造总部所涉及的费用，包括土地收购、建筑材料和劳动力等成本。

活动 1B (请参阅工作纸 1)

在此活动中，问题聚焦于如何找到一个仓库的位置，使其到两家不同商店的距离最短。此活动让学生在现实问题中应用变换一点的知识。

教学建议：

7. 教师可以透过运用以下小程序来促进学生的数学探究。 A 和 B 的坐标可以改变，从而方便他们观察不同的情景，例如以下的情况。



连结：<https://www.geogebra.org/m/a6b9jb2g>

建议答案：

根据以上要求， $WA + WB$ 应是 最小（或最短）。

8. 由于求 W 的坐标涉及到高中数学（直线方程），问题 8 仅要求学生描述找出其位置的方法。

建议答案：

首先，点 B 沿 OE 反射，得到影像 B' 。

第二，我们画一条直线 AB' 。

然后， OE 和 AB' 的交点即为仓库 W 的位置。

9. 与问题 6 类似，教师可以鼓励学生在寻找仓库位置时考虑其他可能的限制。以下是一些可能的讨论结果。

- 可能的限制：在干路旁建造仓库的建设成本可能非常高。从城市规划的角度而言，靠近干路的区域可能被分配用于商业或住宅用途，而不是工业用途。
- 为了应对这些限制，我们可以首先确定 W 的最佳位置。然后，我们可以寻找尽可能靠近最佳位置的其他可行位置。

活动 2A (请参阅工作纸 2)

与涉及两家商店的活动 1A 类似，此活动的问题聚焦于如何找到一个总部的位
置，使其到三家不同商店的距离相同。此活动让学生在现实问题中深入研究三
角形的外心的性质，并与三角形的其他三个中心进行比较。

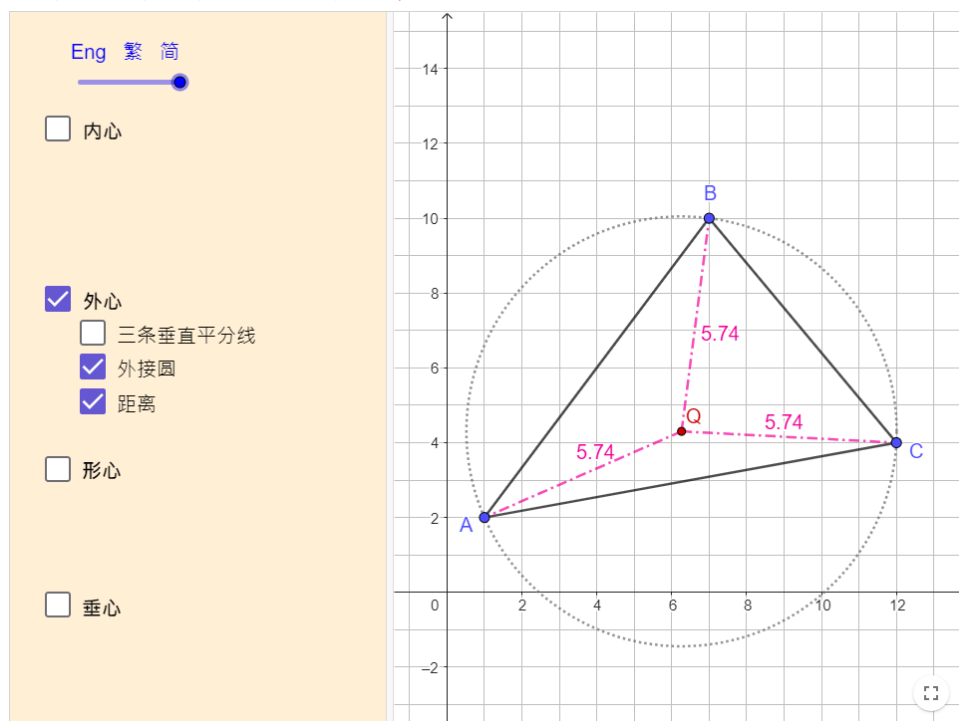
教学建议：

1. 在问题 1 中，教师提高学生运用数学术语来表述现实问题的能力。

建议答案：

$QA = QB = QC$ (或 QA 、 QB 和 QC 是相等。)

2. 基于学生对三角形中心的先备知识，他们选择一个适合的模型来解决问题。
以下的小程式可以用来促进他们的数学探究。



连结：<https://www.geogebra.org/m/gm6ayhap>

建议答案：

你的选择	中心	距离 (准确至最接近的 0.01 km)		
		QA	QB	QC
<input checked="" type="checkbox"/>	外心	5.74	5.74	5.74
<input type="checkbox"/>	内心	7.18	4.23	5.20
<input type="checkbox"/>	形心	6.57	4.68	5.50
<input type="checkbox"/>	垂心	8.43	2.65	5.66

3. 有了活动 1A 的经验，学生应该更能够识别建模时所作出的假设。以下是一些可能的讨论结果，类似于活动 1A 中问题 5 的讨论结果。
- 2D 模型：假设地面是平的。实际上，地球的表面并不是平的。如果总部和三家商店之间的距离非常远，我们便需要考虑地球表面的曲率。
 - 无阻碍传输：没有障碍物（例如山丘或建筑物）阻碍总部和三家商店之间的无线电波传输。
4. 接着，教师可以促使学生考虑模型的局限性。具体而言，该模型无法保证从总部 Q 到三家商店 A 、 B 和 C 的总距离是最短的。

建议答案：

中心	距离（准确至最接近的 0.01 km）			
	QA	QB	QC	总和
内心	7.18	4.23	5.20	16.61
外心	5.74	5.74	5.74	17.22
形心	6.57	4.68	5.50	16.75
垂心	8.43	2.65	5.66	16.74

所选择的位置（ $\triangle ABC$ 的外心）无法使得从 Q 到 A 、 B 和 C 的总距离最短。正如上表所示，该距离（外心：17.22 km）大于其他三个位置，包括 $\triangle ABC$ 的内心（16.61 km）、重心（16.75 km）和垂心（16.74 km）。

活动 2B (请参阅工作纸 2)

在此活动中，问题聚焦于如何找到一个仓库的位置，使其到三角形的三条边的距离相等。此活动让学生在现实问题中深入研究三角形的内心的性质，并与三角形的其他三个中心进行比较。

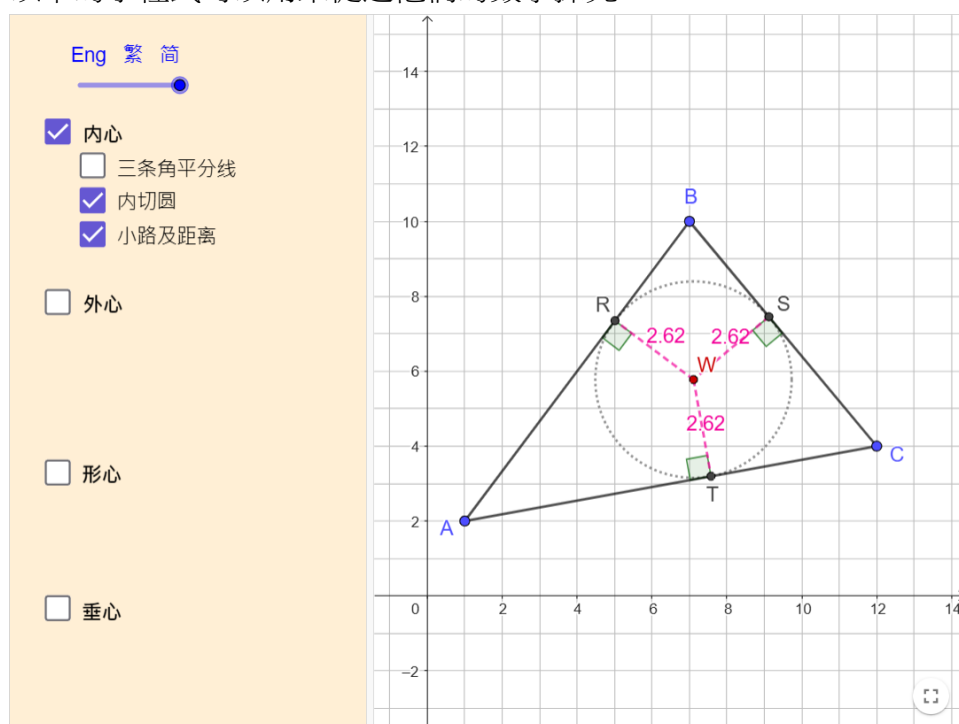
教学建议：

5. 在问题 5 中，教师提高学生使用数学术语表示现实问题的能力。

建议答案：

$WT \perp AC$ (或 WT 垂直 AC 。)

6. 基于学生对三角形中心的先备知识，他们选择一个适合的模型来解决问题。以下的小程式可以用来促进他们的数学探究。



连结：<https://www.geogebra.org/m/bgpwnvje>

建议答案：

你的选择	中心	距离 (准确至最接近的 0.01 km)		
		WR	WS	WT
<input checked="" type="checkbox"/>				
✓	内心	2.62	2.62	2.62
	外心	2.83	4.21	1.32
	形心	2.53	3.24	2.27
	垂心	1.94	1.30	4.15

活动 2C (请参阅工作纸 2)

这个增润活动涉及到较新鲜的数学探究，适合能力较高的学生。在此活动中，学生探讨如何在 $\triangle ABC$ 的一条边上订出仓库 W 的位置。该位置应该把 WA 、 WB 和 WC 的总距离变得最小。

7. 问题 7 涉及到 $\triangle ABC$ 的不同情况。教师可以建议学生先考虑直角三角形的情况，然后是钝角三角形，最后是锐角三角形。前两种情况（即直角三角形和钝角三角形）可能较简单，因为仓库是位于三角形的一个顶点。第三种情况（即锐角三角形）可能更具挑战性，需要教师更多的指导。

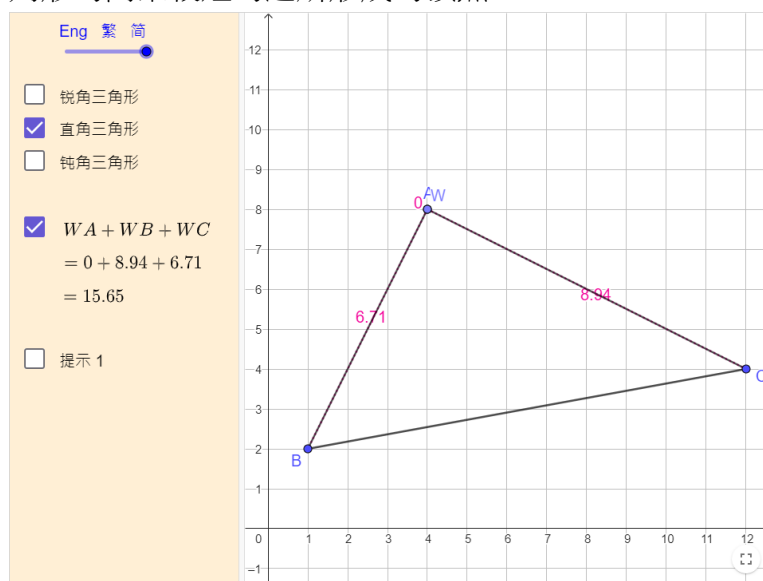
学生可以运用所提供的小程式来促进他们的数学探究：

<https://www.geogebra.org/m/gxtnz4cu>

建议答案：

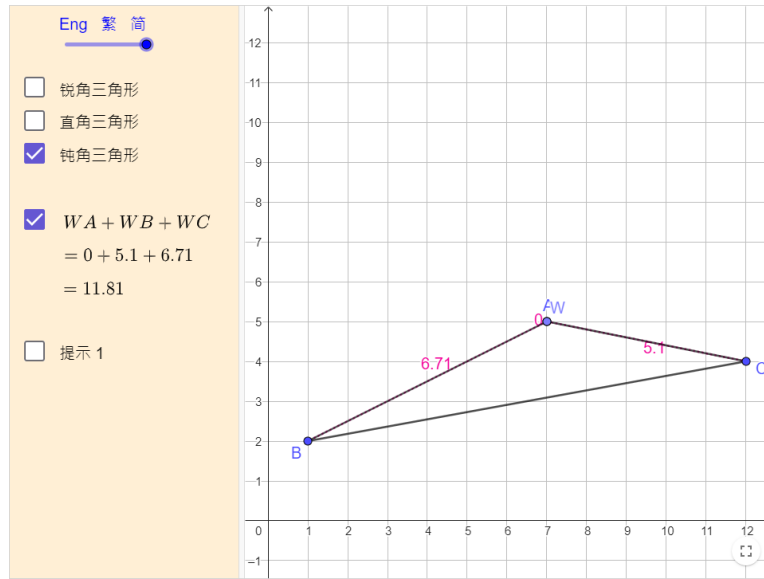
情况 I：直角三角形

W 位于三角形的两条较短的边所形成的顶点。



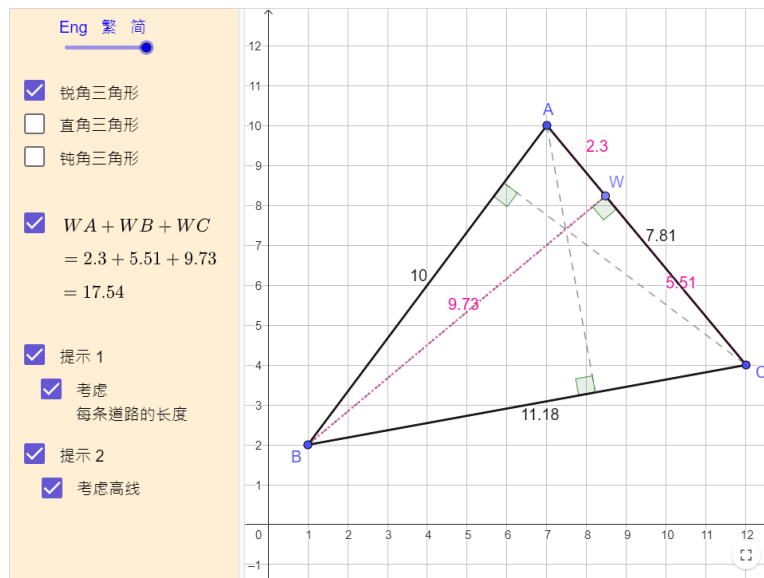
情况 II：钝角三角形

W 位于三角形的两条较短的边所形成的顶点。



情况 III：锐角三角形

W 位于三角形的最短边上的垂足（从其对应的顶点起）。



活动 3 (请参阅工作纸 3)

在这个活动中，学生将创建一个在活动 1A (两点的中点)、2A (三角形的外心) 和 2B (三角形的内心) 中制定的虚拟模型。

教学建议：

1. 学生使用 GeoGebra 创造虚拟的模型。
<https://www.geogebra.org/classic> 是 GeoGebra 的线上應用程式。教师和学生也可以在电脑上安装 GeoGebra。
请到：<https://www.geogebra.org/download>
2. 遵循逐步的指示，学生创建一个虚拟模型来找出在活动 1A 总部 Q 的位置，即商店 A 和 B 的中点。在创建过程中，教师可以回顾中点的概念，以及在建模中所牵涉的假设。
3. 遵循逐步的指示，学生创建一个虚拟模型来找出在活动 2A 总部 Q 的位置，即商店 A 、 B 和 C 的外心。在创建过程中，教师可以回顾三角形的外心的性质，以及在建模中所牵涉的假设。
4. 遵循逐步的指示，学生创建一个虚拟模型来找到在活动 2B 仓库 W 的位置，即商店 A 、 B 和 C 的内心。在创建过程中，教师可以回顾三角形的内心的性质，以及在建模中所牵涉的假设。

参考文献：

- Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

建议的教案和教学流程

教学时间：70 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> 引起学生兴趣 回顾先备知识 	<ol style="list-style-type: none"> 教师透过讨论现实情境来引起学生的兴趣。 教师回顾学生对三角形的中心的先备知识。 	WS 封面 WS 重温 Q1-4
15	<ul style="list-style-type: none"> 应用中点的概念 介绍模型的概念 应用所制定的模型 提升学生在建模中作出假设和认出其他因素的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 教师提高学生运用数学术语表达现实世界问题的能力。 教师透过要求学生绘画两个表示商店 A 和 B 的任意点来促进讨论。 学生在一些具体的情况中找出总部的位置。 教师向学生介绍模型的概念。 学生应用中点公式的知识来建模。 学生应用他们所制定的模型找出总部 Q 的位置。 学生运用距离公式计算从 Q 到每家商店 A 和 B 的距离。 教师带领学生讨论所制定模型所作出的假设。 教师鼓励学生讨论在寻找位置时应该考虑的其他因素。 	WS1A Q1-2 WS1A Q3 WS1A Q4 WS1A Q5-6
10	<ul style="list-style-type: none"> 应用变换一点的知识 提升学生在建模中认出可能限制的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 教师透过运用所提供的小程式来促进学生的数学探究。 学生描述找出仓库位置的方法。 教师鼓励学生在寻找仓库位置时考虑其他可能的限制。 	WS1B Q7-8 WS1B Q9

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> 深入研究三角形的外心的性质 提升学生在建模中作出假设和认出局限的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师提高学生运用数学术语来表述现实问题的能力。 2. 学生选择一个适合的模型（从三角形的四个中心）来解决问题。 3. 学生运用所提供的小程式来促进他们的数学探究。 4. 教师带领学生讨论所制定模型所作出的假设。 5. 教师促使学生考虑模型的局限性。 	<p>WS2A Q1–2</p> <p>WS2A Q3–4</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> 深入研究三角形的内心的性质 在不同的情况下找出最佳的解决方案 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师提高学生运用数学术语来表述现实问题的能力。 2. 学生选择一个适合的模型（从三角形的四个中心）来解决问题。 3. 教师透过运用所提供的小程式来促进学生的数学探究。 4. 学生描述在不同的情况下找出仓库位置的方法。 	<p>WS2B Q5–6</p> <p>WS2C Q7</p>
15	<ul style="list-style-type: none"> 创建在此活动中所制定的虚拟模型 总结活动 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 学生创建一个在活动 1A 中的虚拟模型（两点的中点）。 2. 教师回顾中点的概念，以及在建模中所牵涉的假设。 3. 学生创建一个在活动 2A 中的虚拟模型（三角形的外心）。 4. 教师回顾三角形的外心的性质，以及在建模中所牵涉的假设。 5. 学生创建一个在活动 2B 中的虚拟模型（三角形的内心）。 6. 教师回顾三角形的内心的性质，以及在建模中所牵涉的假设。 	<p>WS3 Q1–4</p>